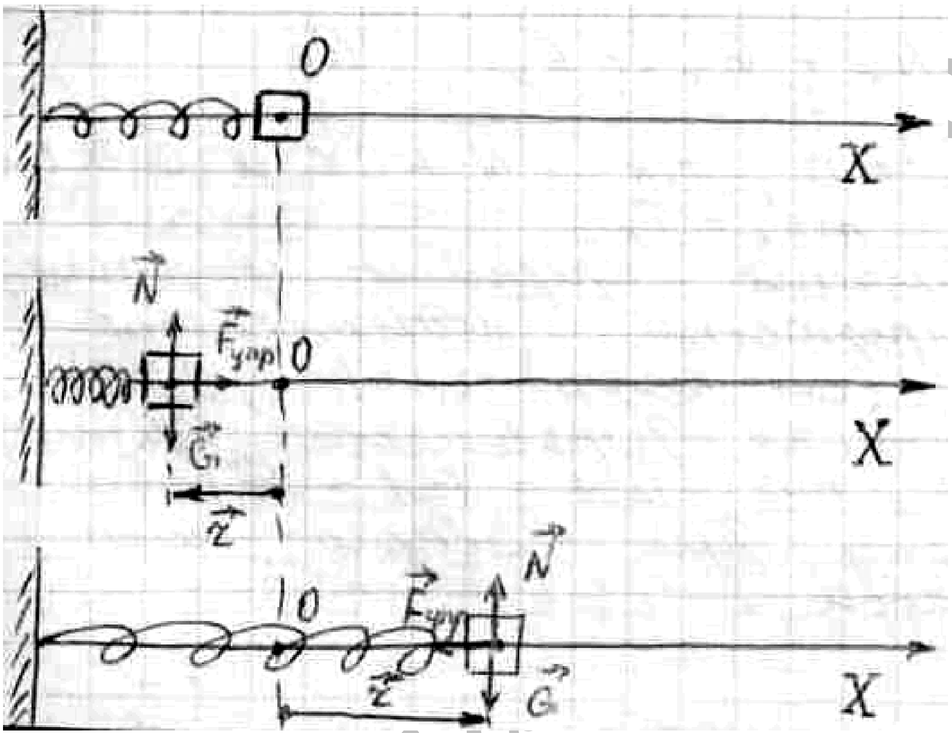
§ 187. Гармоническое колебание груза на пружине, период этого колебания

1.



Пусть по горизонтально расположенному стержню скользит груз массы m (без трения).

Груз прикреплён к одному концу пружины, а другой её конец закреплён неподвижно.

Ось $\overrightarrow{OX}$ совместим со стержнем, а начало координат – с центром тяжести груза, когда пружина не деформирована.

Если пружину сжать или растянуть, то положение груза при колебаниях можно определить радиус-вектором $\vec{r}$. На груз действуют и силы: $\vec{G}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – нормальная реакция со стороны опоры и сила упругости со стороны пружины – $\vec{F}_{\text{упр}}$.

Согласно II закону Ньютона ускорение груза определяется всеми действующими на него силами.

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{\text{упр}}$$

В проекциях на ось $\overrightarrow{OX}$:

$$ma_x = N_x + G_x + F_x, \text{ где}$$

$$N_x = 0, \quad G_x = 0, \text{ т.к. } \vec{N} \perp \overrightarrow{OX} \text{ и } \vec{G} \perp \overrightarrow{OX}.$$

$$ma_x = F_x$$

Если деформация пружины упругая, то сила упругости подчиняется закону Гука (см. § 75 лекций).

Если абсолютная деформация пружины равна $\Delta l = x$, то $|\Delta l| = |x| = |\vec{r}|$. Согласно закону Гука модуль силы упругости равен $F_{\text{упр}} = k|\vec{r}| = k|\Delta l| = k|x|$.

Учитывая, что $\vec{F}_{\text{упр}} \uparrow\downarrow \vec{r}$, имеем: $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}$.

Зная, что проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат равны координатам конца этого вектора $(r_x = x)$, получаем, что проекция силы упругости на ось $\overrightarrow{OX}$ запишется так $F_x = -kx$.

Теперь II закон Ньютона в проекциях на ось $\overrightarrow{OX}$ запишется так $ma_x = -kx$; $ma_x + kx = 0$.

Знаем, что в любом переменном движении проекция ускорения на ось равна второй производной координаты по времени:

$$a_x = x''(t) = \ddot{x}.$$

Имеем: $m\ddot{x} + kx = 0$.

Поделим на m: $\ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0$.

Проверим размерность $\frac{k}{m}$:

$$\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{1}{\text{с}^2},$$ т.е. размерность квадрата частоты.

Согласно опытным данным величина $\frac{k}{m}$ соответствует квадрату циклической частоты свободных (собственных) колебаний, которую будем обозначать ω_0.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \; (1)$$

Теперь дифференциальное уравнение колебания запишется так $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$. (2)

Уравнение (2) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка, или уравнением гармонического колебания в дифференциальной форме. Нетрудно догадаться, что решением этого уравнения является гармоническая функция $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$. (3)

Убедимся в этом проверкой:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,; \quad \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x\,.$$

Подставив в (2) получим: $-\omega_0^2 x + \omega_0^2 x = 0$; 0=0.

2. Период колебания груза на пружине.

Знаем, что в любом гармоническом колебании период вычисляется по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

В данном случае $\omega = \omega_0$.

Учитывая (1), имеем: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad (4)$$

Формула (4) справедлива при колебаниях груза не только на одной пружине, но и для систем пружин, а также и для других систем, в которых действует сила упругости. В таких случаях под k в формуле (4) понимается жёсткость системы.

Примечания:

строго говоря, колебания груза на пружине даже при упругой деформации не являются гармоническими. Дело в том, что закон Гука и для упругой деформации выражается не линейной функцией от величины деформации Δl. Модуль силы упругости представляет собой бесконечный ряд слагаемых, содержащий Δl в более высоких степенях. Но при малых деформациях Δl^2 или Δl^3 и т.д. очень малы по сравнению с Δl и такими слагаемыми можно пренебречь, т.е. считать, что $F_{\text{упр}} = k|\Delta l|$. Это с большой степенью точности соответствует опыту.